ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆ

ಆಂಗ್ಲಮೂಲ: ವಿನಯ್ ನಾಯರ್
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್
(ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು 2 ರಿಂದ 12 ರವರೆಗಿನ (ಕೆಲವು ಪಠ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ 7 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. 12ರ ಮುಂದಿನ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು ಭಾಗವಾಗುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಆ ಭಾಜಕವನ್ನು ಎರಡು ಸಹ-ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದು, ಪ್ರತಿ ಸಹ-ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನದಿಂದಲೂ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಆಯಿತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 20 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ; $20 = 4 \times 5$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ (ಇಲ್ಲಿ 4 ಮತ್ತು 5 ಸಹ-ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು), ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು 20 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಲು 4 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ, ಹಾಗೂ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ, ಸಾಧ್ಯ. ಇಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸಹ-ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ನಿರ್ಣಾಯಕ ಅಂಶವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $10 \times 2 = 20$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದರೂ, 10 ಮತ್ತು 2 ಸಹ-ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿರದೇ ಇರುವುದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು 10 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಅದು 20 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯೊಂದನ್ನು ನೀವೇ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ.

7, 13, 17 ಮತ್ತು 19 ರಂತಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಚರ್ಚಾ ವಿಷಯವನ್ನು ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೈಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, "ವೈದಿಕ ಗಣಿತ"ದಲ್ಲಿ ("ಅತಿ ಶೀಘ್ರಗತಿಯ ಗಣಿತ" ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ; ಬಾಕ್ಸ್ 1ನ್ನು ನೋಡಿ) ಇಂತಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳು ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ತಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

9ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ

"ವೈದಿಕ ಗಣಿತ"ದ ಲೇಖಕರು 19, 29, 39,...ರಂತಹ (ಇವೆಲ್ಲವೂ 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಭಾಜಕಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಪರೀಕ್ಷಾವಿಧಾನಗಳೂ ಒಂದೇ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿವೆ. "ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ" (ಹಿಂದಿನದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು) ಎಂಬ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಾವು 19, 29, 39,...ಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ 20, 30, 40,... ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. 19, 29, 39 ರ "ಸ್ಪರ್ಷಕ"ಗಳು (20, 30, 40 ರಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿದರೆ ಉಳಿಯುವ ಅಂಕಿಗಳು) ಕ್ರಮೇಣ 2, 3, 4 ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು ಬಳಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸಂಕೇತ. ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ N ಅನ್ನು $10a + b$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ b ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ (ಅಂದರೆ, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) ಹಾಗೂ a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ನಾವು a ಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ "ಉಳಿದ ಭಾಗ" (ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕೈಬಿಟ್ಟ ಬಳಿಕ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $N = 2356$ ಆದರೆ, $b = 6$ ಹಾಗೂ $a = 235$. ಭಾಜಕ d ಯ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು k ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. ನಾವೀಗ 19 ರಿಂದ 114 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ನಾವು ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಗುವ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿದೆ:

ಹಂತ 0: ಇದು "ಆರಂಭೀಕರಣದ ಹಂತ"ವಾಗಿದೆ. ಭಾಜಕವಾದ d = 19 ಆಗಿದೆ, ಅದರ ಸ್ಪರ್ಷಕ k = 2 ಆಗಿದೆ. N, b, a ಗಳ ಆರಂಭಿಕ ಬೆಲೆಗಳು: N = 114 (ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ), b = 4 (ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ) ಹಾಗೂ a = 11 ("ಉಳಿದ ಭಾಗ") ಆಗಿವೆ. N, b, a ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮುಂದಿನ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಂತ 1: c ಬೆಲೆಯನ್ನು, c = (N ನ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ × 19 ರ ಸ್ಪರ್ಷಕ), ಅಂದರೆ, c = b.k ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹೀಗಾಗಿ, c = 4 × 2 = 8 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ c ಬೆಲೆಯನ್ನು a ಗೆ ಕೂಡಿ, ಅಂದರೆ, ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದ b ಯನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಉಳಿಯುವ N ನ ಭಾಗ; ಆದ್ದರಿಂದ a + c = 11 + 8= 19 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು N ನ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು N ನ ಈ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 3: N ನ ಈ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆ 19 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ನೋಡಿ. ಭಾಗವಾದರೆ, ನಾವು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆ 19 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಮಗಿದು ಖಚಿತವಿರದಿದ್ದರೆ, 19 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ (ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ) ಎಂದು ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಹೇಳುವಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವವರೆಗೂ ಹಂತ 1–2–3 ಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಾರಿ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವಾಗಲೂ ನಾವು *N*, *a*, *b* ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2. ನಾವೀಗ 19 ರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ 2356 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಹಂತ 0: ಆರಂಭೀಕರಣ: d = 19; k = 2; N = 2356 (ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ), b = 6 (ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ), a = 235 ('ಉಳಿದ ಭಾಗ').

ಹಂತ 1: c = b.k = 6 × 2 = 12 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.

ಹಂತ 2: a + c = 235 + 12 = 247 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು. ಇದು ಈಗ N ನ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಈ ಹಂತದ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆಗಳು: N = 247, b = 7, a = 24 ಆಗುತ್ತವೆ.

ಹಂತ 3: 19 ರಿಂದ 247 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ನಮಗಿದು ಖಚಿತವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ ನಾವೀಗ ಹಂತ 1–2–3 ನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: c = b.k = 7 × 2 = 14 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.

ಹಂತ 2: a + c = 24 + 14 = 38 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.

ಹಂತ 3: 19 ರಿಂದ 38 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ಹೌದು. ಹೀಗಾಗಿ, 19 ರಿಂದ 2356 ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3. 19 ರಿಂದ 1234 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ

ಹಂತ 0: ಆರಂಭೀಕರಣ: d = 19; k = 2; N = 1234 (ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ), b = 4 (ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನ), a = 123 (‘ಉಳಿದ ಭಾಗ’).
ಹಂತ 1: c = bk = 1 × 2 = 2 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.
ಹಂತ 2: a + c = 123 + 2 = 125 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.
ಹಂತ 3: 125 ನ್ನು 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದೆ? ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, 1234 ನ್ನು 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಒಂದು ಸಂದೇಹ

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಯಾವಾಗ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯದೇ ಹೋಗಬಹುದು. ನಾವು 19 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ತಲುಪುವತನಕ ಹಂತ 1–2–3 ಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತಲೇ ಇರಬೇಕು. ಈಗ 1121 ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೊದಲ ಹಂತದ ಬಳಿಕ ನಮಗೆ 114 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 114 ನ್ನು 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂದಾದರೆ, ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೇ ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗದಿದ್ದರೆ, 114 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಹಂತಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು 29, 39, 49, 59, . . . ಗಳಿಗೆ ಹೀಗೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳು 3, 4, 5, 6, . . . ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಹಿಂದಿರುವ ತಾರ್ಕಿಕತೆ

114 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ನಾವು 4 × 2 = 8 ಮಾಡಿ ಅದಕ್ಕೆ 11 ನ್ನು ಕೂಡಿ 11 + 8 = 19 ನ್ನು ಪಡೆಯುವಾಗ ನಾವು “ನಿಜವಾಗಿ” ಮಾಡುತ್ತಿರುವುದು 110 + 80 ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುತ್ತಿರುವುದಷ್ಟೆ. ಆದರೆ,

$$110 + 80 = 114 - 4 + 80 = 114 + 76 = 190$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿಜವಾಗಿಯೂ ನಾವು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 76 ನ್ನು ಕೂಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹ ಸಂಗತಿಯೆಂದರೆ, 19 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ 76 ಒಂದಾಗಿದೆ. 190 ಮತ್ತು 76 ಎರಡೂ 19 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 114 ಕೂಡ 19 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

114 ರ ಬದಲು ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಇರುವ 171ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಾವು ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಷಕ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಂದ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ನಾವು ನಿಜವಾಗಿಯೂ 20 ನ್ನು ಕೂಡಿ 1 ನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ (ಏಕೆಂದರೆ, ನಾವು ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ 1 ನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ). ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 20 − 1 = 19 ನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. 19 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ 19 ಒಂದು! ಇದೇ ರೀತಿ, ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ ಬೇರೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 5 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕವು 5 × 2 = 10 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ನಾವು 100 – 5 = 95 ನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಿದ್ದು, ಅದು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ 19 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ.

29, 39, 49, . . ಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಹೀಗೆಯೇ ನಡೆಯುತ್ತವೆ. ಸಾರಭೂತವಾಗಿ, ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಷಯದಲ್ಲೂ ಇದೇ ರೀತಿಯ ತರ್ಕ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಇತರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು

ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷಾಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದಷ್ಟೇ ನಾವೀಗ ಮಾಡಬೇಕಿರುವುದು.

ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 9 ಇರದಂತಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 7 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ, ನಾವು 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ 7 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದರೆ 49. ನಾವೀಗ "ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ" ಸುತ್ರಾನುಸಾರ ಅದಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿ 50 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ 0 ಯನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿ 50 ರ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ 5 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, 7 ರಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು 5 ಸ್ಪರ್ಷಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಗಮನವಿಟ್ಟು ನೋಡಿದರೆ, ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಸರಳವಾಗಿದೆ. 5 ನ್ನು ಸ್ಪರ್ಷಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 49 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಖ್ಯೆ 49 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದರಿಂದ 7 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗಲೇ ಬೇಕು.

ಇದೇ ರೀತಿ 13, 17, 23, . . .ಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಷಕ ಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಮಾಡಬಹುದು; ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4, 12, 7, . . ಆಗಿವೆ.

1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ

ಈಗ ನಾವು 21, 31, 41, . . .ರಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡುವ ಬದಲು (9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ), 1 ನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಸೂತ್ರವೆಂದರೆ, "ಏಕನ್ಯೂನೇನ ಪೂರ್ವೇಣ" (ಹಿಂದಿನದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ). ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು 21, 31, 41, . . .ರಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ 20, 30, 40 ಆಗಿವೆ. ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ನಾವು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿವ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಷಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, 20, 30 ಮತ್ತು 40 ರ ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳು ಕ್ರಮೇಣ 2, 3 ಮತ್ತು 4 ಆಗುತ್ತವೆ. ಇದಾದ ಬಳಿಕ ನಾವು 9 ರಿಂದ ಭಾಜ್ಯತೆ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸಿದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೂಡುವ ಬದಲು ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4. 21 ರಿಂದ 441 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಹಂತ 0: ಆರಂಭೀಕರಣ: $d = 21$; $k = 2$; $N = 441$ (ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ), $b = 1$ (ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ), $a = 44$ ('ಉಳಿದ ಭಾಗ').

ಹಂತ 1: $c = bk = 1 \times 2 = 2$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.

ಹಂತ 2: $a - c = 44 - 2 = 42$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು. ಈಗ $N = 42$, $b = 2$, $a = 4$.

ಹಂತ 3: 21 ರಿಂದ 42 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ಹೌದು. ಹೀಗಾಗಿ, 21ರಿಂದ 441 ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ತಾರ್ಕಿಕತೆ. ತಾರ್ಕಿಕತೆ ಕೂಡ ಹಿಂದಿನಂತೆಯೆ. ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ 1 ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 44 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ನಾವು ನಿಜವಾಗಿಯೂ $440 - 20 = 441 - 1 - 20 = 441 - 21$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 21 ನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೇವೆ. $441 - 21 = 420$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಹಾಗೂ 21 ರಿಂದ 420 ಭಾಗವಾಗುವುದರಿಂದ, ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 441 ಕೂಡ 21 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ ಏನಾದರೂ 3 ಆಗಿದ್ದು, ನಾವು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗದಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ನಡೆಯುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯೆಂದರೆ 3 × 2 = 6 ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿದಾಗ ನಾವು ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗದಿಂದ 6 ನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ ನಾವು ನಿಜವಾಗಿಯೂ (ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಬೆಲೆ ಪದ್ಧತಿಯ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ) 60 ನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. 3 ನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸುವುದರಿಂದ ನಾವು 3 ನ್ನೂ ಕಳೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ, ಒಟ್ಟು 63ನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. 21 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ 63 ಬರುವುದರಿಂದ, ಅಂತಿಮ ಸಂಖ್ಯೆಯು 21 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 21 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಉಳಿದ ಬಿಡಿ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ. 7 ರ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು, ಮೇಲೆ ನೋಡಿರುವಂತೆ, 49 ರ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು 21ರ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನೂ ಬಳಸಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ, ಇದೂ ಸಹ 7 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಸಂಕಲವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆಯೋ ಅಥವಾ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಭಾಜಕಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ:

ಭಾಜಕ	7	13	17	23	27	37
9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಅಪವರ್ತ್ಯ	49	39	119	69	189	259
ಅದರ ಸ್ಪರ್ಷಕ	5	4	12	7	19	26
1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಅಪವರ್ತ್ಯ	21	91	51	161	81	111
ಅದರ ಸ್ಪರ್ಷಕ	2	9	5	16	8	11

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಭಾಜಕದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಭಾಜಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 13 ರ ಸ್ಪರ್ಷಕಗಳು 4 ಮತ್ತು 9 ಆಗಿದ್ದು, 4 + 9 = 13 ಆಗುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಸ್ಪರ್ಷಕವನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವುದೋ ಅದನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ನಮಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 17 ರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸ್ಪರ್ಷಕವಾಗಿ 12 ನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಲೆಕ್ಕ ಅನಗತ್ಯವಾಗಿ ಉದ್ದವಾಗುತ್ತದೆ. ಬದಲಿಗೆ ನಾವು ಸ್ಪರ್ಷಕ 5 ನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಲೆಕ್ಕ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ವೈದಿಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ತೆರನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಾದರೂ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ.

.

ವೈದಿಕ ಗಣಿತ

ವೈದಿಕ ಗಣಿತವೆಂದರೆ 16 ಸಂಸ್ಕೃತ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನ. ಇದನ್ನು ಶ್ರೀಶಂಕರಮಠಾಧೀಶ್ವರರಾದ ಸ್ವಾಮೀ ಭಾರತೀಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರು 1911– 1918 ರಲ್ಲಿ ಅನ್ವೇಷಿಸಿದರು.

ನಾವಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಾಗಿ ಆದ್ಯಪ್ರವರ್ತಕರಾದ ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಪಾದಕರ ಟಿಪ್ಪಣಿ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ ಓದುಗರು ವಿಕಿಪೀಡಿಯ ಉಲ್ಲೇಖ [1] ನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಪ್ಯಾರಾದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ:

> ವೈದಿಕ ಗಣಿತವೆಂಬುದು ಹಿಂದೂ ಸ್ವಾಮೀ ಭಾರತೀಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಮೊದಲು 1965 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವೇದಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದುವು ಎಂದು ಹೇಳುವ ಮಾನಸಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಇದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಸಿಗುವ ಮಾನಸಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೂ "ವೈದಿಕ ಗಣಿತ" ಎಂದೇ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. "ವೈದಿಕ"ವೆಂಬ ಇದರ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಟೀಕಿಸುವ ಪಂಡಿತವರ್ಗವು ಭಾರತೀಯ ಶಾಲಾಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇದರ ಸೇರ್ಪಡಿಕೆಯನ್ನು ಕೂಡ ವಿರೋಧಿಸಿದೆ.

ಉಲ್ಲೇಖಗಳು

ವಿನಯ್ ನಾಯರ್ ಅವರು "ರೇಝಿಂಗ್ ಎ ಮ್ಯಾಥಮಟೀಷನ್ ಫೌಂಡೇಶನ್" (ಗಣಿತಜ್ಞನನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕುವ ಸಂಸ್ಥೆ) ಸಂಸ್ಥೆಯ ಸಹ-ಸ್ಥಾಪಕರು. ಇವರು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಕಲಿಕೆ ಮತ್ತು ಪುರಾತನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ದೇಶದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಆನ್ ಲೈನ್ ಹಾಗೂ ಆಫ್ ಲೈನ್ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತಾರೆ. ಶಾಲಾ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಸಂಶೋಧನೆಯ ಮನಃಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕುವ ಆಕಾಂಕ್ಷೆ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸ, vinay@sovm.org.